Ejercicios

1.—Se da una curva definida por sus coordenadas polares $r=f(\varphi)$. Dos puntos A y B se desplazan sobre la curva de modo que $\sphericalangle$ AOB = Constante. Demostrar que el área encerrada por OA, OB y el arco AB pasa por un valor extremo cuando OA=OB y que este valor será máximo o mínimo, según que $tg\Theta_A$ sea menor o mayor que $tg\Theta_B$, siendo Θ el ángulo que forma la tangente con el radio vector.

2.—Demostrar que: $\displaystyle\int \frac{(2a^2-x^2)\,x^3}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{a^4}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + C$

3.—En la ecuación:

$$x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 V}{\partial^2 z} + yz\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + xz\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} + xy\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = 0$$

se cambian las variables independientes x, y, z por las nuevas variables α, β, δ ligadas a las primeras por las relaciones: $x = \beta\vartheta$, $y = \vartheta\alpha$, $z = \alpha\beta$. Demostrar que se tiene: $\alpha^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2} + \beta^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial\beta^2} + \delta^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} = 0$

4.—El área limitada por la curva L. G. de los pies de las perpendiculares trazadas desde el centro de una elipse, de semiejes «a» y «b», sobre las tangentes a ella vale: $\frac{1}{2}\pi(a^2+b^2)$.

5.—El volumen del sólido comprendido entre el cilindro $x^2+y^2 = 2ax$ y los planos $\begin{cases} z = x\,tg\alpha \\ z = x\,tg\beta \end{cases}$ vale: $V = \pi(tg\alpha - tg\beta)\,a^3$

6.—Encontrar las coordenadas del Centro de Gravedad del área encerrada por el eje de las x y el arco OM de una parábola $y^2 = 2px$, suponiendo que el área no es homogénea, sino que la densidad varía, siendo proporcional a la distancia al eje de las y.

7.—Si una curva pasa por el origen, mostrar que el área limitada por la curva, el eje de las «x» y la tangente en el punto de abscisa x_1, es igual a la integral:

$$\frac{1}{2}\int_0^{x_1} y^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2}\, dx$$

8.—Hallar la ecuación del círculo osculador en cualquier punto de la curva $r = a\varphi$.

9.—Integrar la ecuación:

$$x^n \frac{d^2y}{dx^2} + 2n\, x^{n-1}\frac{dy}{dx} + n(n-1)\, x^{n-2}\, y = (n-1)\, x^{n-2}$$

10.—Un móvil parte del origen O con una velocidad escalar V constante, y se mueve según el eje OX. Otro móvil parte desde un punto A, sobre el eje OY, con la misma velocidad V y en el mismo instante, siguiendo una curva tal que la tangente en el punto en que se encuentra el móvil A pasa en cada instante por el punto en que se encuentra el móvil que se mueve a lo largo de OX. Determinar la ecuación de la curva descrita por el móvil A.

11.—Integrar la ecuación: $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (1+x)\frac{dy}{dx} - y = 0$

12.—Dada la ecuación: $x\frac{d^2y}{dx^2} + (a+x)\frac{dy}{dx} + Ky = 0$. Determinar una relación entre a y K, de modo que la ecuación propuesta tenga una solución de la forma $e^{\alpha x}$. Integrar la ecuación.